

ТРАЕКТОРИИ, ИЛИ ОГИБАЮЩИЕ В ФОРМЕ КОНИК

Романова Татьяна Владимировна

СУНЦ УрФУ, 11Г

г. Екатеринбург

Пушкарева Екатерина Константиновна

СУНЦ УрФУ, 11Г

г. Екатеринбург

Шерстобитов Антон Вячеславович

руководитель спецкурса в СУНЦ УрФУ

2019 год

Введение

Исследованием кривых второго порядка человечество начало заниматься еще до нашей эры. Принято считать, что первое определение коник дал древнегреческий математик Менокх (умер в 320 г. до н.э.). После него изучением геометрических свойств кривых второго порядка занимались Евклид и Архимед, Жерар Дезарг и Блез Паскаль, разработавшие теорию коник, используя раннюю форму проективной геометрии, Рене Декарт и Пьер Ферма, в своих исследованиях применявшие недавно ими разработанную аналитическую геометрию. Наибольший вклад в изучение коник внес один из трех величайших математиков древнего мира – Аполлоний, создавший множество посвященных им трудов. С тех пор было открыто и изучено множество интересных свойств этих кривых, но не часто можно наткнуться на информацию об исследовании движения коник или коник, задающихся движением. Изучением этих интересных явлений мы и занимаемся в нашем проекте.

Одним из методов работы с кривыми второго порядка и изучения их движения является метод **полярного преобразования**. С помощью принципа перенесения, соответствующего **полярному** преобразованию, в данном проекте выведено множество новых теорем, истинность которых следует из исходных. Все они представлены на евклидовой плоскости, дополненной бесконечно удаленной прямой.

Определение. Полярное преобразование производится относительно окружности с центром в точке O (O – **центр полярного преобразования**) и радиуса R и ставит в соответствие каждой точке плоскости A прямую a , перпендикулярную OA и пересекающую луч OA в такой точке A' , что выполняется соотношение: $|OA| \cdot |OA'| = R^2$. Прямая a называется **полярной** точки A . Точка A называется **полюсом** прямой a .

Чтобы к теореме применить принцип перенесения, соответствующий полярному преобразованию, нужно каждый термин в ее формулировке заменить на его полярный образ, учитывая основные свойства полярного преобразования. При перенесении достаточно определить положение точки O – центра полярного

преобразования, а радиус окружности, как нетрудно понять из формулы, влияет только на масштаб чертежа, что не имеет значения на проективной плоскости. В нашем проекте мы продемонстрируем, как с помощью принципа перенесения мы изучили и вывели новые свойства кривых второго порядка.

Замечание: углом между прямыми на проективной плоскости будем считать угол, меньший или равный 90° .

Теоретическая справка

К кривым второго порядка (коникам) относятся следующие виды кривых:

- 1) Эллипс – фигура, сумма расстояний от точки которой до двух других фиксированных точек (фокусов) постоянна и равна расстоянию между вершинами фигуры (большой полуоси).

Пусть F_1 и F_2 – фокусы эллипса, а M – точка на нём (Рис. 1.1.а), тогда:

$$F_1M + MF_2 = \text{const}$$

Касательная, проходящая через точку M на эллипсе, является биссектрисой внешнего угла для $\angle F_1MF_2$.

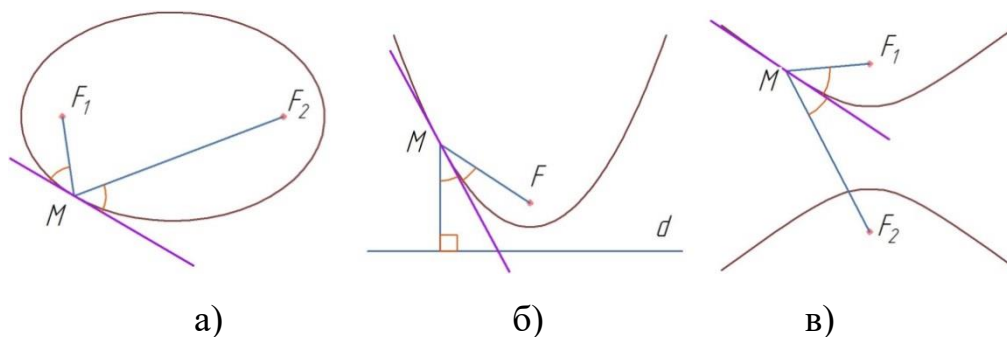


Рис. 1.1

- 2) Параболой называется множество точек, расстояния от которых до фиксированной точки (фокуса) и прямой (директрисы) равны.

Пусть F – фокус параболы, d – директриса, M – точка на параболе, A – проекция точки M на d (Рис. 1.1.б). Тогда:

$$FM = MA$$

Касательная, проходящая через точку M , является биссектрисой угла $\angle FMA$.

- 3) Гиперболой называется множество точек, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянен.

Пусть F_1 и F_2 – фокусы гиперболы, а M – точка на ней (Рис. 1.3.в), тогда:

$$|F_1M - MF_2| = \text{const}$$

Касательная в точке M является биссектрисой $\angle F_1MF_2$.

Исследовательская часть

Выделим основное свойство полярного преобразования.

Теорема. Если точка B принадлежит поляре точки A , то полярная точки B пройдет через точку A .

Доказательство:

Пусть O – центр полярного преобразования, R – радиус произвольной окружности с центром в точке O , a – полярная произвольной точки A , A' – точка пересечения луча OA и прямой a . Точка B – произвольная точка на прямой a , b – полярная точки B , B' – точка пересечения прямых OB и b (Рис. 2.1).

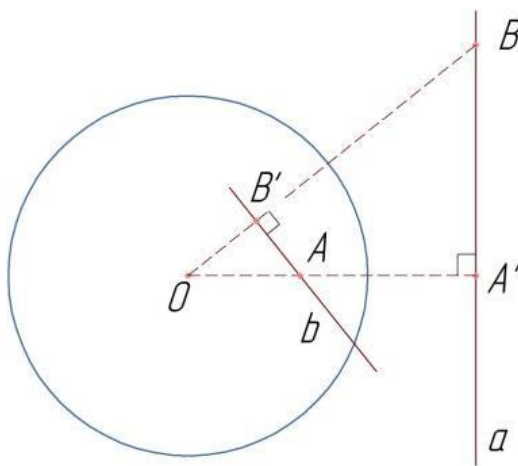


Рис. 2.1

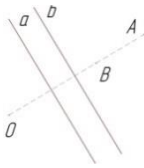
Пусть прямая b пересекает прямую OA' в точке L .

Из определения полярного преобразования: $|OA| \cdot |OA'| = R^2$ и $|OB| \cdot |OB'| = R^2$. Приравняв выражения, получим, что $|OA| \cdot |OA'| = |OB| \cdot |OB'|$ (*).

По определению полярного преобразования $OB \perp b$ и $OA \perp a$. Из этого следует, что $\angle OB'L = \angle OA'B$. Угол $\angle LOB'$ ($\angle BOA'$) – общий для $\triangle LOB'$ и $\triangle BOA'$, следовательно, $\triangle LOB' \sim \triangle BOA'$ (по двум углам) и $\frac{OL}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$.

Преобразовав соотношение, получим, что $OB \cdot OB' = OL \cdot OA'$. Подставим в левую часть (*) и сократим на OA' . Получим, что $OL = OA$. Так как L и A лежат на одном и том же отрезке, то $L = A$ и, следовательно, прямая b (полярная точки B) всегда проходит через точку A , если точка B лежит на полярной точки A и выполняется соотношение $|OB| \cdot |OB'| = |OA| \cdot |OA'| = R^2$.

Для простоты применения принципа перенесения составим таблицу полярного преобразования.

До полярного преобразования	После
Точка A	Прямая a
Параллельные прямые	Точки, лежащие на одной прямой с центром полярного преобразования, перпендикулярной исходным прямым 
Угол между прямыми	Равный ему угол между прямыми, проходящими через полюсы прямых и центр полярного преобразования
Окружность	Если центр окружности <i>совпадает</i> с центром полярного преобразования, то окружность перейдет в <i>концентрическую окружность</i> ; Если центр окружности <i>не совпадает</i> с центром полярного преобразования, то окружность перейдет в <i>коническую</i> (эллипс, параболу или гиперболу), ее центр – в <i>директрису</i> , а центр полярного преобразования станет одним из <i>фокусов</i> коники.
Точка на окружности	Касательная к окружности или конике

Детально рассмотрим перенесение угла между прямыми при полярном преобразовании.

Пусть P – точка пересечения прямых a и b , угол между прямыми равен α , A' – точка пересечения прямых OA и a , точка B' точка пересечения прямых OB и b (Рис. 2.2).

Из определения полярного преобразования: $OA \perp a$ и $OB \perp b$, следовательно $\angle OA'P = \angle OB'P = 90^\circ$. Угол между прямыми равен α , а сумма противоположных углов в четырехугольнике $A'PB'O$ равна 180° , значит углы между прямыми a, b и OA, OB равны (так как все углы мы считаем $\leq 90^\circ$).

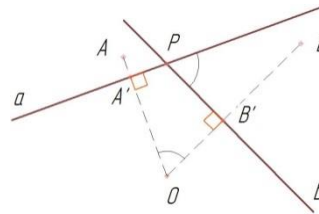


Рис. 2.2

Рассмотрим доказательство перехода окружности при перенесении, соответствующем полярному преобразованию.

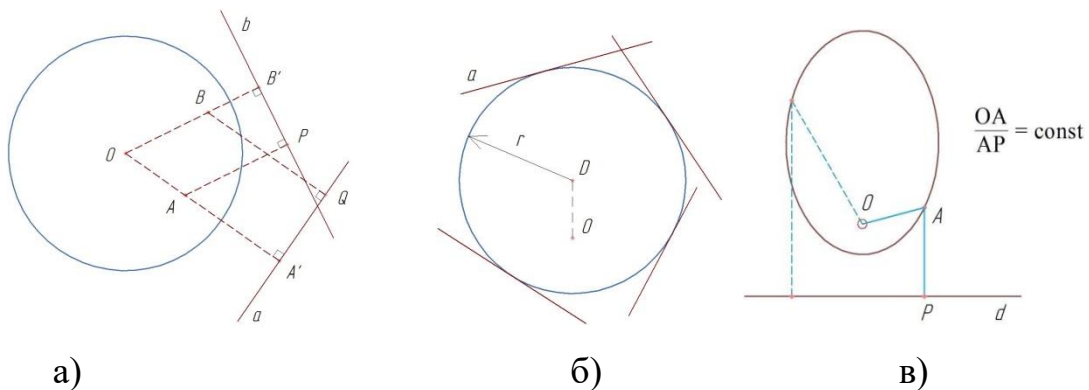


Рис. 2.3

Пусть даны прямая b и точка A , точка B и прямая a – их образы, точки P и Q – основания перпендикуляров из точек A и B на прямые b и a соответственно (Рис. 2.3а). Расстояние $AP = l$. Рассмотрим прямоугольные трапеции $OBQA'$ и $OAPB'$. Так как угол при вершине O у них общий и $\frac{OB}{OA'} = \frac{OA}{OB'}$ (следует из определения полярного преобразования), трапеции подобны. Следовательно

$$BQ = l \frac{OB}{OA} \quad (1)$$

Далее рассмотрим, во что переходит окружность (D, r) при полярном преобразовании относительно точки O . Исходную окружность будем

представлять, как совокупность прямых a , удалённых от точки D на расстояние r (Рис. 2.3б). Возможны два случая:

1) Если точка O совпадает с D , тогда несложно заметить, что образом окружности также будет окружность с центром D , радиус которой равен $1/r$, только теперь она представляется, как совокупность точек.

2) Если точка O не совпадает с D , то при полярном преобразовании точка D перейдёт в прямую d , прямая a в точку A , расстояние от которой до d обозначим AP , где P – основание перпендикуляра из точки A на прямую d . Из формулы (1) следует, что $AP = r \frac{OA}{OD}$. Таким образом, окружность (D, r) перейдёт во множество таких точек A , для которых $\frac{OA}{AP} = \frac{OD}{r} = \text{const}$, то есть множество всех точек, отношение от которых до данной точки O и до данной прямой d равно постоянной величине (Рис 2.3б). Это и есть характеристика кривых второго порядка. Так, например, если точка O находится внутри окружности ($OD < r$), то при преобразовании получатся эллипс; если на окружности ($OD = r$), то парабола; если вне окружности ($OD > r$), то гипербола (Рис. 2.4). Также важно отметить, что при таком преобразовании точка O переходит в фокус, а D в директрису.

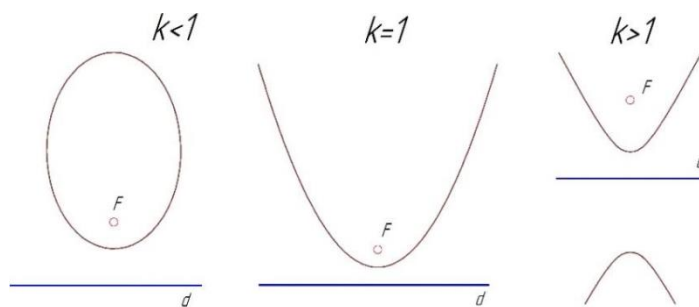


Рис. 2.4

Теоремы

Теорема 1.

Даны две концентрические окружности s и q с центром в точке D (s – меньшая из окружностей). На окружности q взяты две произвольные точки M и M' . Из них проведены касательные к окружности s (прямые a, b и a', b' соответственно). Тогда углы между a, b и a', b' будут равны, а прямая DM (k) будет биссектрисой угла, образованного прямыми a и b (Рис. 3а).

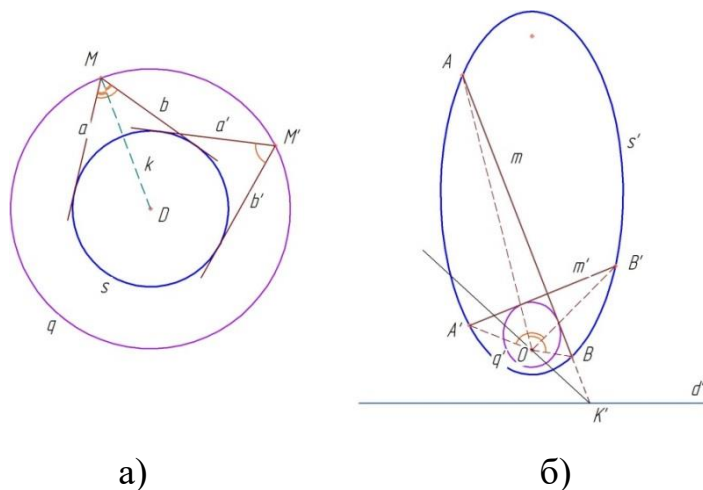


Рис. 3

При перенесении, соответствующем полярному преобразованию с центром в точке O , точка D переходит в прямую d' , окружности s и q в коники s' и q' с общей директрисой d' и одним из фокусов в точке O . Точки M и M' – в прямые m и m' , касающиеся коники q' в произвольных точках. Прямая m пересечет конику s' в точках A и B (образы прямых a и b), прямая m' – в точках A' и B' (образы прямых a' и b'), прямая k переходит в точку $K' = m \cap d'$. Угол между прямыми a, b перейдет в угол $\angle AOB$, между a', b' – в угол $\angle A'OB'$ (Рис. 3б).

Это позволяет сформулировать новую теорему:

Теорема 1.1.

Даны коники s' и q' с общим фокусом O и соответствующей директрисой d' . К конике q' , лежащей во внутренней области второй коники, проведены произвольные касательные m и m' , пересекающие конику s' в точках A, B и A', B' соответственно. Тогда $\angle AOB = \angle A'OB'$, а OK' – биссектриса угла $\angle AOB$, где $K' = m \cap d'$.

Из этой теоремы несложно вывести еще одно интересное свойство:

Теорема 1.2.

Дана коника s' с фокусом O и соответствующей директрисой d' . Пусть на конике s' взяты две произвольные точки A и B и они движутся так, что угол $\angle AOB$ остается постоянным. При таком движении прямая AB огибает некоторую конику q' с фокусом O и директрисой d' .

Таким образом, мы увидели, что при некоторых движениях прямая может задавать новую конику.

Теорема 2.

Дана коника s с фокусами O и F , точка D движется по конике s (Рис. 4.1а). Тогда окружность q с центром D и радиусом DO огибает окружность p с центром F .

Доказательство:

Для доказательства данной теоремы достаточно показать, что окружность q ($D; DO$) всегда имеет общую точку с окружностью p , и в этой точке окружности имеют общую касательную.

Рассмотрим случай, когда коника s является эллипсом. Проведём прямую FD , точку её пересечения с окружностью ($D; DO$), не принадлежащую отрезку FD , назовём A . Из определения эллипса $FD + DO = \text{const}$, то есть величина постоянная. При этом $DO = DA$ как радиусы одной окружности q . Тогда $FD + DA = FA = \text{const}$, значит множество точек A будет образовывать окружность с центром в точке F (окружность p). Касательная к окружности ($D; DO$) в точке A будет являться и касательной к окружности p , так как она перпендикулярна прямой, соединяющей центры окружностей. Значит, это их общая касательная.

Аналогично теорема доказывается и для гиперболы.

В случае, когда коника s является параболой, окружность q задает прямую (так как радиус окружности, задаваемой при движении центра другой окружности по эллипсу, зависит от расстояния между фокусами, а парабола — это эллипс, один

из фокусов которого бесконечно удален, то окружность,двигающаяся по параболе, задает окружность бесконечно большого радиуса, то есть прямую).

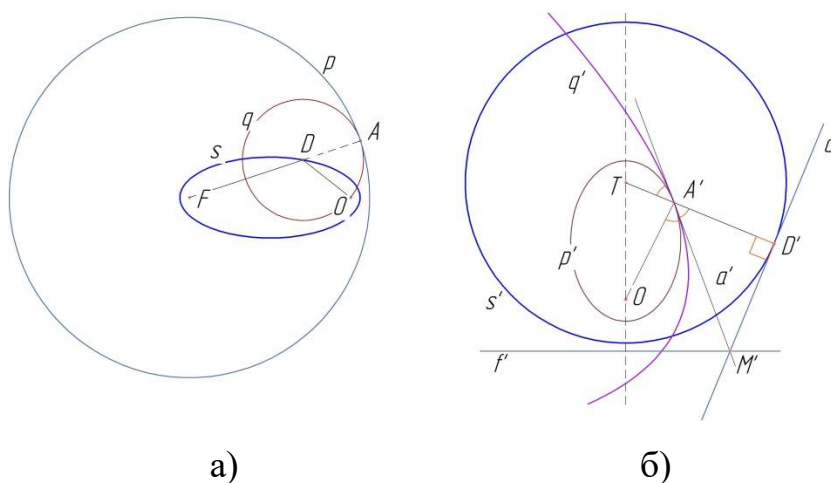


Рис. 4.1

При перенесении, соответствующем полярному преобразованию с центром O , коника s переходит в окружность s' , точка D – в касательную d' к этой окружности, окружность q – в параболу с директрисой d' и фокусом O (т.к. q проходила через точку O и имела центр D), окружность p – в конику p' с фокусом O , точка F – в соответствующую директрису коники p' , прямую f' (Рис. 4.1б).

Это позволяет вывести новую теорему:

Теорема 2.1.

Дана окружность s' и точка O . Прямая d' движется так, что при этом остается касательной к окружности s' . Тогда парабола q' с фокусом O и директрисой d' движется так, что огибает конику p' с фокусом O (если O – внешняя точка для окружности s' , то коника является гиперболой, если внутренняя, то эллипс). Пусть a' – касательная к конике p' в точке ее касания с параболой, тогда точка $M' = a' \cap d'$ движется по соответствующей директрисе f' коники p' .

Подробнее исследовав **теорему 2.1**, мы можем определить положение второго фокуса коники p' . Для этого докажем вспомогательную теорему:

Лемма

Если две коники имеют ровно один общий фокус и касаются друг друга, то их точка касания лежит на прямой, соединяющей два других фокуса.

Доказательство:

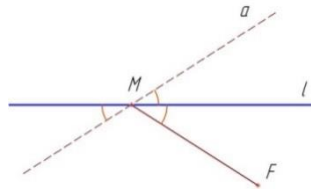


Рис. 4.2

Пусть F – общий фокус коник s и s' , M – их точка касания, а прямая l , соответственно, касательная в этой точке (Рис. 4.2). Из определения касательной к конике, прямая, соединяющая второй фокус и точку касания, является симметричной FM относительно l (так как касательная к конике является биссектрисой угла, образованного прямыми, соединяющими фокусы с точкой касания). Из этого следует, что на прямой a , симметричной FM относительно l , лежит как фокус коники s , так и фокус коники s' .

В случае, когда одна из коник – парабола, прямая a будет являться перпендикуляром к директрисе параболы, а соответственно будет параллельна ее оси симметрии.

Доказанная нами Лемма позволяет дополнить **теорему 2.1**.

Теорема 2.2

Центр окружности s' , по которой движется директриса параболы q' , совпадает со вторым фокусом коники, которую огибает парабола.

Доказательство:

Рассмотрим случай, когда коника p' является эллипсом.

Пусть T' – второй фокус коники p' . В **теореме 2.1** A' – точка касания коник q' и p' , тогда отрезок $OA' = A'D'$ (из определения параболы), а для коники p' выполняется соотношение $OA' + A'T' = \text{const}$. Из этого следует, что $A'T' + A'D' = \text{const}$. По **лемме** точки T' , A' и D' лежат на одной прямой, следовательно, все точки D' касания директрисы параболы с окружностью s' равноудалены от точки T' , что и означает, что точка T' совпадает с центром окружности.

Теорема 3.

Дана коника q с фокусами F и G . Точка A движется по q . Прямая $AF \cap q = B$ ($B \neq A$) (Рис. 5а). Тогда окружность s , построенная на отрезке AB , как на диаметре, огибает две другие окружности u и w , каждая из которых касается q в одной из вершин.

Чтобы доказать эту теорему, достаточно доказать перенесенную **теорему 3**.

При перенесении, соответствующем полярному преобразованию с центром в точке $O \equiv F$, коника q переходит в окружность q' , точки A и B – в параллельные диаметрально противоположные касательные к окружности a' и b' , окружность s перейдёт в конику s' .

Детальней рассмотрим, как окружность s переходит в конику s' . Окружность s имеет две общих точки A и B с коникой q , которые при перенесении перейдут в прямые a' и b' , являющиеся касательными к фигурам q' и s' . При перенесении коники q и её касательных мы выяснили, что a и b параллельны, но при этом касаются коники s' в точках A' и B' ; центр полярного преобразования и одновременно фокус коники O лежит на прямой, а значит точки A' и B' – вершины коники. Тогда окружность s перейдёт в конику s' с фокусом O , касающуюся прямых a и b в своих вершинах.

Следовательно, окружности u и w перейдут в коники u' и w' , каждая из которых касается q' в одной из своих вершин.

Теорема 3.1

Дана окружность q' с центром в точке T и произвольная точка O . Точка D движется по окружности q' , DE – диаметр окружности, прямые a' и b' – касательные в точках D и E соответственно, а точки A' и B' – проекции точки O на эти прямые (Рис. 5б). Тогда коника s' с вершинами A' и B' , один из фокусов которой совпадает с O , при движении огибает две коники u' и w' с фокусами O и T , касающиеся окружности q' каждая в одной из своих вершин.

Для положения точки O рассматриваются два случая:

Если точка O лежит внутри окружности q' , то в любой момент времени коника s' имеет форму эллипса.

Если точка O лежит вне окружности q' , то при движении коника s' меняет форму, становясь, то эллипсом, то гиперболой. Коника s' – эллипс, когда точка O лежит между касательными к окружности, а когда точка O лежит во внешней области касательных, то коника s' – гипербола.

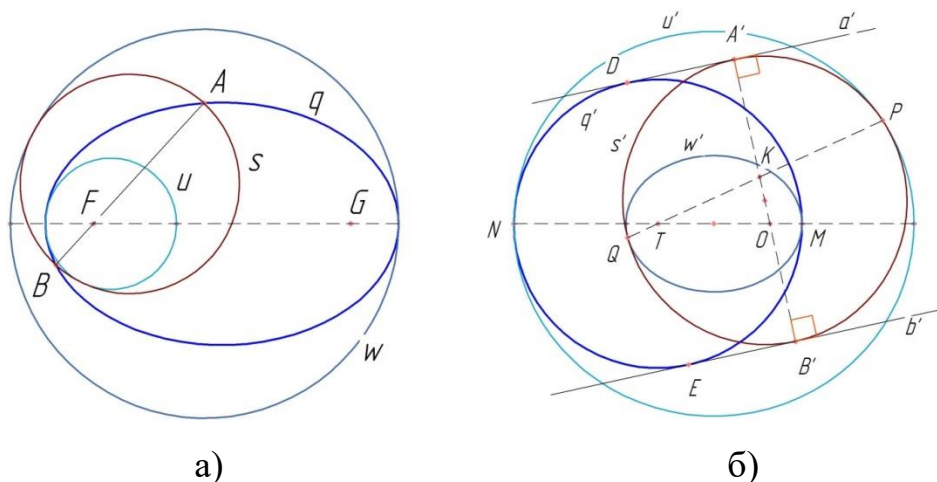


Рис. 5

Доказательство:

Рассмотрим случай, когда O лежит внутри окружности q . Покажем, что меньшая из кривых, которую огибает коника s' – некоторый эллипс w' с фокусами T и O . Точку их касания обозначим точкой Q .

В эллипсе s' найдем второй фокус K , отразив фокус O относительно середины отрезка $A'B'$. Тогда точка T лежит на прямой QK , по **лемме**. Несложно показать, что $TO = TK$, а раз точки T и O фиксированы, то величина TK постоянна. С другой стороны, по определению эллипса s' : $KQ + QO = A'B' = 2r$, где r – радиус окружности q' . А это значит, что $KQ + QO - TK = TQ + QO = 2r - TO = const$, следовательно, по определению w' – эллипс. Также это позволяет доказать, что эллипс w' касается окружности q' в вершине M , где M – точка пересечения луча TO с w' (в этой точке кривые имеют общую касательную, что следует из основных свойств).

Аналогично доказываем теорему для большей коники u' . Подобным методом доказывается случай, когда точка O лежит вне окружности.

Таким образом, доказана **теорема 3.1** и из этого следует истинность **теоремы 3.**

Заключение

В ходе работы над проектом мы познакомились с некоторыми общеизвестными теоремами и, применяя метод полярного преобразования, вывели из них более сложные, что позволило нам найти новые свойства коник и способы их задания. В проекте мы так же работали с теоремами разной сложности, начиная от простейшего построения коники с помощью прямой и заканчивая построениями, в которых использовали другие коники, изучали движение кривых и свойства их касательных.

В будущем нам хотелось бы изучить новые свойства коник, пользуясь другими методами исследования и преобразования плоскости, а также углубить свои знания о методе перенесения, соответствующего полярному преобразованию, и рассмотреть случаи, охватывающие движения центра полярного преобразования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. А. В. Акопян, “Геометрия в картинках”
2. А. В. Акопян, А. А. Заславский, “Геометрические свойства кривых второго порядка”